Academia de Ciencias Matemáticas,
Físico-Químicas y Naturales de Granada

Series de Fourier: Una relación fraternal entre el Análisis Matemático y la Física

Discurso leído en el acto de su recepción como académico numerario por el

Ilmo. Sr. D.
Antonio Cañada Villar

Granada, 2009

Academia de Ciencias Matemáticas,
Físico-Químicas y Naturales de Granada

SERIES DE FOURIER: UNA RELACIÓN FRATERNAL ENTRE EL ANÁLISIS MATEMÁTICO Y LA FÍSICA

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO NUMERARIO POR EL

ILMO. SR. D.

ANTONIO CAÑADA VILLAR

GRANADA, 2009

SERIES DE FOURIER: UNA RELACIÓN FRATERNAL ENTRE EL ANÁLISIS MATEMÁTICO Y LA FÍSICA

SERIES DE FOURIER: UNA RELACIÓN FRATERNAL ENTRE EL ANÁLISIS MATEMÁTICO Y LA FÍSICA

Antonio Cañada Villar

A mi querida mujer Ery
y a nuestros queridos hijos Diego y Julia

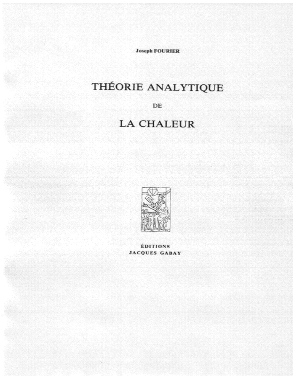
1. **Preliminar**

Excelentísimo Señor Presidente de la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, Ilustrísimos Académicos, queridos amigos, quisiera empezar este discurso agradeciendo a esta Academia el haberme nombrado miembro de la misma. Aunque considero que esto constituye para mí un honor inmerecido, espero corresponder desempeñando de manera satisfactoria las obligaciones que se corresponden con el cargo. Ilusión y ganas no me van a faltar.

Para mí no es una frase más lo del "honor inmerecido". En efecto, cuando comencé a escribir este discurso, inmediatamente me acordé de aquél muchacho adolescente que estudió en el Instituto de Bachillerato de Torredonjimeno, provincia de Jaén, tierra de olivos (y por tanto de buen aceite, buenas neuronas y bajo colesterol), y al que ya por entonces y fuertemente influenciado por sus profesores, empezaban a gustarle las matemáticas. Uno de mis sueños era ser algún día profesor. Los sueños de los jóvenes son los más bonitos y utópicos, y yo en aquella época soñaba con poder dedicarme a la enseñanza. Este sueño lo he cumplido sobradamente, gracias en buena medida a los estupendos profesores que tuve en la Universidad de Granada y a aquel plan de estudios tan bueno que cursé durante los años 1974 a 1979. Aunque parezca mentira, se dedicaban cursos completos (no cuatrimestres, por supuesto) a las disciplinas básicas de la matemática y esto se notó sin ningún género de duda en nuestra formación. Las satisfacciones que me ha proporcionado y proporciona mi actividad docente hacen que la recomiende vivamente a los jóvenes de hoy en día, a pesar de los tiempos que corren.

Si la enseñanza de la matemática ha hecho que realmente viva muchos momentos de felicidad, no han sido menos aquellos de auténtica euforia derivados de mi actividad investigadora. La lógica y el rigor de la matemática me atrajeron desde el principio, pero lo que es el placer sentido en la creación matemática no llegué a experimentarlo hasta que me inicié en la investigación allá por 1979. La satisfacción de descubrir nuevas cosas (aunque sean intrascendentes), y más aún, el placer de buscar, aunque no encuentres nada, es muy reconfortante para los científicos. Además, la investigación matemática te facilita conocer a personas de otros países, otras culturas, otras religiones... con lo que esto significa de enriquecimiento personal. Creo sinceramente que los que nos dedicamos a la docencia y a la investigación somos unos privilegiados y tenemos que transmitir estos sentimientos a los jóvenes de hoy en día, tan necesitados de valores en los que creer.

Cuando terminé el bachillerato mi gran duda era si estudiar matemáticas o física, mi segundo gran amor científico. Ahora, con 50 años cumplidos he resuelto esta duda: lo mejor es estudiar y enseñar series de Fourier, que aúnan a la perfección ambas disciplinas.



Joseph FOURIER

THÉORIE ANALYTIQUE

DE

LA CHALEUR

ÉDITIONS
JACQUES GABAY

J.Fourier (1768-1830)

Las series de Fourier nacieron en la física pero crecieron en el análisis matemático. Las palabras siguientes, del prólogo del célebre libro de Fourier "Théorie Analytique de la Chaleur", publicado en francés en 1822, son de hecho una alabanza al análisis matemático:

"El análisis matemático es tan extenso como la naturaleza misma; define todas las relaciones sensibles, mide el tiempo, los espacios, las fuerzas, las temperaturas; su atributo principal es la claridad; no tiene en absoluto signos para expresar nociones confusas. Relaciona los fenómenos más diversos y descubre las analogías secretas que los une. Si la materia se nos evade, por su extrema tenuidad, como la del aire y de la luz, si los cuerpos están situados lejos de nosotros, en la inmensidad

del espacio, si el hombre quiere conocer el espectáculo de los cielos en épocas sucesivas que un gran número de siglos separa, si las acciones de la gravedad y del calor se ejercen en el interior del globo sólido a profundidades que nos serán siempre inaccesibles, el análisis matemático puede, con todo, dominar las leyes de estos fenómenos. El nos los hace presentes y parece ser una facultad de la razón humana destinada a suplir la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos".

Como hemos tenido oportunidad de apreciar, Fourier pone de manifiesto la brevedad de la vida y, respecto de mi discurso, estoy todavía en la parte preliminar. ¡No se preocupen! De todas formas, prometo no extenderme demasiado, entre otras razones porque ya no está uno para muchos trotes. La reflexión siguiente del gran poeta español Luis Cernuda completa la reflexión de Fourier:

"Llega un momento en la vida cuando el tiempo nos alcanza. (No sé si expreso esto bien). Quiero decir que a partir de tal edad nos vemos sujetos al tiempo y obligados a contar con él, como si alguna colérica visión con espada centelleante nos arrojara del paraíso primero, donde todo hombre una vez ha vivido libre del aguijón de la muerte".

Procuremos no ponernos tan trascendentes y poner los pies en el suelo, aunque no tanto, debido al problema que describimos a continuación: "el problema de la cuerda vibrante".

2. **La cuerda vibrante**

El cálculo infinitesimal fue el mayor logro de la matemática en el siglo XVII. En el siglo XVIII se desarrollaron muchas ramas del análisis relacionadas con ello: ecuaciones diferenciales, geometría diferencial, cálculo de variaciones, etc. y esto permitió el estudio de muchos problemas que surgieron en física y otras ciencias; tantos que las siguientes palabras de Berkeley son muy significativas:
"Y así pasa que los matemáticos de este tiempo actúan como hombres de Ciencia, empleando mucho más esfuerzo en aplicar sus principios que en comprenderlos".
Precisamente uno de los tipos de problemas más interesantes del que se ocuparon los científicos del siglo XVIII estuvo relacionado con el tema de las vibraciones. Partiendo de una situación inicial determinada y suponiendo que un conjunto de fuerzas, también determinado, actúan, ¿cómo vibran una cuerda, una membrana, etc.? Por ejemplo, si una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa, estando sus extremos fijos en dos puntos distintos del eje de abscisas, y desde un punto determinado de la cuerda se tira de la misma y se suelta, ¿cuál es el movimiento descrito por la cuerda?, ¿qué forma adopta la misma para valores positivos del tiempo? Este tipo de problemas fue ya estudiado por Taylor, alrededor de 1714 ([12], [42]), quien llegó a la conclusión de que para vibraciones pequeñas la aceleración normal es proporcional a la curvatura. Esto son leyes de la física. Los matemáticos necesitamos papel y tener algo escrito para sentirnos en nuestra casa, para visualizar el problema. Si no, estamos perdidos. A este respecto, viene muy bien la historia que en el capítulo 0 de su libro "El rincón de la pizarra" detalló nuestro entrañable maestro

Miguel de Guzmán, fallecido prematuramente en Madrid en 2004 ([33]):

“Se encontraba Norbert Wiener ante su clase en el Massachusetts Institute of Technology en medio del desarrollo de una complicada demostración. La pizarra estaba llena a rebosar de intrincadas fórmulas. De pronto se atascó, se quedó mirando fijamente a la última fórmula y pareció convertirse en estatua por un buen rato. Todos pensaban, conteniendo el aliento, que estaba en un callejón sin salida. Pero Wiener, sin decir una sola palabra, se dirigió al rincón de la pizarra, donde había todavía un pequeño espacio libre, y trazó unas pocas figuras que nadie pudo ver pues quedaban ocultas por su propia espalda. De pronto se le iluminó el rostro. Sin decir ni una sola palabra borró sus figuras misteriosas y volvió al punto en que se había atascado para continuar ya impecablemente y sin problema alguno hasta el final”.

Volviendo a nuestro tema, D’Alembert y Euler, alrededor de 1747 ([42], [13], [32]) escribieron en términos matemáticos el problema citado usando ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (¿qué sería de la física sin las ecuaciones diferenciales? y ¿qué sería de las ecuaciones diferenciales sin la física?) En su versión más sencilla, D’Alembert y Euler demostraron (¿alguien pensaba que no íbamos a hablar de demostraciones en este discurso?) que si la función $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x (suponemos $0 \leq x \leq \pi$ por simplicidad) y el tiempo t, entonces, si la posición inicial de la cuerda viene dada por una función f y la velocidad inicial de la cuerda es cero, la función u satisface

$$(2.1)\qquad \begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0 < x < \pi, t > 0 \\ \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, t \geq 0 \end{array}$$

Aquí aparece la llamada ecuación de ondas, que refleja matemáticamente la ley enunciada por Taylor, y que es de gran importancia en muchos otros fenómenos físicos. Ambos matemáticos, D'Alembert y Euler, encontraron además la fórmula para la única solución de (2.1) como superposición de dos ondas (construidas a partir de la posición inicial de la cuerda), que se desplazan respectivamente a la derecha e izquierda con velocidad constante ([16], [42]).

Otra manera de obtener la solución del problema (2.1), completamente distinta (al menos a primera vista), fue propuesta por Daniel Bernoulli en 1753. La idea clave es obtener la solución de (2.1) como superposición de ondas más sencillas que las que aparecen en el método de propagación de las ondas, usado por D'Alembert y Euler. Más concretamente, Daniel Bernoulli propuso ondas especiales definidas a partir de funciones trigonométricas de la forma

$$(2.2)\qquad u_n(x,t) = sen(nx)\cos(nt),\ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Para cada tiempo t fijo, la anterior función es un múltiplo de la función $sen(nx)$, que se anula exactamente en $n-1$ puntos del intervalo $(0,\pi)$. Así, si pudiésemos observar la vibración de la cuerda correspondiente a las ondas u_n, tendríamos $n-1$ puntos, llamados nodos, en los que la cuerda se mantendría constantemente fija en el eje

de abscisas (como en los extremos del intervalo $[0, \pi]$). Entre dichos nodos, la cuerda oscilaría de acuerdo con (2.2).
¿Cómo concibió Bernoulli esta idea? Parece ser que se basó en sus conocimientos musicales: el sonido que emite una cuerda vibrante es, en general, superposición de armónicos, es decir, superposición de funciones de la forma $u_n(x, t)$. Tales funciones representan para $n = 1$ el tono fundamental y para $n > 1$ sus armónicos, y desde el punto de vista musical se corresponden con los tonos puros. Así, Bernoulli afirmó que cualquier sonido que produjese la vibración de la cuerda debe ser superposición de tonos puros. Desde el punto de vista matemático, ello significa que la solución de (2.1) debe representarse como una superposición infinita de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen(nx) \cos(nt), \tag{2.3}$$

donde los coeficientes f_n han de elegirse adecuadamente para que se satisfagan todas las relaciones de (2.1). Si la solución propuesta por Bernoulli fuese correcta, ello implicaría que la posición inicial de la cuerda debe ser, a su vez, una superposición infinita del tipo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen(nx), \ \forall \ x \in [0, \pi], \tag{2.4}$$

para una adecuada elección de los coeficientes f_n. Ahora bien, ¿quiénes son los coeficientes f_n? Bernoulli no fue capaz de dar una respuesta general a esta cuestión (más bien se concentró en el estudio de series especiales de la forma $\sum \frac{\text{sen} nx}{n^p}$). Respecto del método que usó para solucionar (2.1), recibió duras contestaciones por parte de D'Alembert y Euler, quienes no admitían que una función inicial f, más o menos arbitraria, pudiera representarse en la forma (2.4). Representativo de la discusión entre los matemáticos citados puede ser el artículo de D'Alembert titulado "*Fondamental*" contenido en el volumen séptimo de la famosa "*Encyclopédie*". Puede consultarse, además, la referencia [36]. La controversia se prolongó durante años.

3. **La propagación del calor: aportaciones de Fourier y las series armónicas de Euler**

Parece ser que las ideas de Bernoulli fueron fuente de inspiración para Jean Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés, nacido en 1768 y muerto en 1830. Fourier, profesor de análisis de la Escuela Politécnica, se interesó entre otras cosas, por la teoría de la conducción del calor en los cuerpos sólidos. ¿Cómo se propaga el calor? Si el cuerpo que estamos considerando está completamente aislado, ¿tenderá a hacerse uniforme? Si su frontera la mantenemos a cero grados centígrados, ¿tenderá el calor uniformemente a cero?

Fourier fue un hombre polifacético (véanse [31], [35] y [39] para profundizar en aspectos personales de su vida). Acompañó a Napoleón, en calidad de científico, en la campaña de éste a Egipto. Allí, como secretario del Instituto de Egipto, hizo gala de una gran competencia en diversos asuntos administrativos. Al regresar a Francia, y como profesor de análisis de la Escuela Politécnica, Fourier se interesó por la teoría de la conducción del calor. (Siempre me he preguntado cómo es posible tener tiempo para todo). En 1807 envió una memoria a la Academia de Ciencias de París, que trataba sobre dicho tema ("Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides"). En su versión unidimensional, Fourier consideró una varilla delgada de longitud dada, cuyos extremos se mantienen a 0^o centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura en la varilla viene dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante), ¿cuál será la temperatura de cualquier punto x de la varilla en el tiempo $t \in (0,T)$? Fourier fue capaz de escribir el problema usando ecuaciones en derivadas parciales, obteniendo las relaciones:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T, \\
&u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq \pi.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Aquí aparece la célebre ecuación del calor, de interés en otros muchos problemas de la física (algunos físicos la llaman ecuación de Fourier). Como Bernoulli, Fourier afirmó que la temperatura solución de (3.1) está dada como superposición infinita de temperaturas sencillas. Más concretamente propuso que la función u viene dada por la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \exp(-n^2 t) sen(nx), \tag{3.2}$$

donde

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\ dx,\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Sin duda, el hecho de haber alcanzado la fórmula anterior para los coeficientes f_n es una de las contribuciones fundamentales de Fourier, y marca una diferencia significativa respecto del trabajo previo de Bernoulli sobre este tema. No obstante, la memoria de Fourier fue estudiada por Lagrange, Laplace y Legendre y fue muy criticada por los miembros de la Academia Francesa, siendo su principal objeción la falta de rigor. A pesar de ello, los miembros de tan prestigiosa institución estaban convencidos de la importancia que tenían los problemas relacionados con la propagación del calor y, los resultados teóricos presentados por Fourier tenían una gran concordancia con diversos experimentos llevados a cabo previamente. Por este motivo, convocaron un premio sobre el tema. Dicho premio fue otorgado a Fourier en 1811, por su memoria revisada "Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides". A pesar de ello, los miembros de la Academia seguían criticando su falta de rigor, como se observa en el informe que emitieron ([39])

"Esta obra encierra las verdaderas ecuaciones diferenciales de la transmisión de calor, tanto en el interior de los cuerpos como en su superficie; y la novedad del tema, junto con su importancia, han decidido a la Clase a coronar esta obra, observando, sin embargo, que la manera en la que el autor llega a sus ecuaciones no está exenta de dificultades, y que su análisis para integrarlas deja aún algo que desear, tanto en lo que respecta a la generalidad como incluso del lado del rigor".

Por este motivo, Fourier no consiguió el propósito de publicar su trabajo en la célebre serie "Mémoires" de la Academia Francesa. Fourier publicó por su cuenta su famoso libro *Théorie Analytique de la Chaleur*, en 1.822 en París ([26]), donde incorporó parte de su artículo de 1812 prácticamente sin cambio. El libro fue calificado por el físico Arnold Sommerfeld, en 1949, como "Biblia de la Física Matemática" ([24]). Muy indicativo de la misma idea es la biografía sobre Fourier, de Dhombres y Robert, publicada en 1998 y que lleva por título: Fourier, Créateur de la physique-mathématique ([22]).

El libro de Fourier es actualmente una obra clásica, aunque según Kahane, Fourier era sin duda, *"demasiado matemático para ser un verdadero físico y demasiado físico para ser un verdadero matemático"* (véase [39]). Dos años más tarde de publicar su libro, Fourier consiguió el cargo de Secretario de la Academia Francesa. No obstante, Fourier no fue suficientemente considerado por la sociedad francesa después de su muerte. Por ejemplo, Víctor Hugo en el libro tercero de su obra "Les Misérables", publicada en 1862 escribe

"Había en la Academia de Ciencias un Fourier célebre a quien la posteridad ha olvidado y en no se qué desván un Fourier oscuro de quien el futuro se acordará".

Según J.P. Kahane, profesor de la Université Paris-Sud Orsay y que ha hecho contribuciones importantes en el tema de series de Fourier, el "Fourier oscuro" es Charles Fourier (1772-1837), el falansteriano, filósofo y fundador de la Escuela Societaria.

Leyendo el libro original de Fourier, no es de extrañar la reacción de los miembros de la Academia Francesa. Invitado en el año 2006 por la Sociedad Española de Matemática Aplicada SEMA, para escribir un artículo de carácter histórico, tuve la oportunidad de estudiar algunas de las ideas originales de Fourier contenidas en los párrafos 207 a 223, de la sección VI, de una versión inglesa de 1878 del libro citado ([27]). Esto se plasmó en el artículo [16]. En mi opinión, en los razonamientos de Fourier hay de todo: una parte que puede calificarse de obrera, en el sentido de que es cálculo y más cálculo sin ideas significativas. Otras deducciones son ingeniosas y otras son simplemente audaces. Como es lógico, se apoyó en diversos descubrimientos previos obtenidos por otros autores (Bernoulli, Taylor, Euler, etc.). El mismo Lebesgue comenta ([24]) que aunque el método empleado por Fourier no es riguroso, es interesante sobre todo por la ingeniosidad de las transformaciones que lleva a cabo. Merece la pena comentar a continuación algunas de ellas.

En su intento de hallar la fórmula de los coeficientes (3.3), Fourier se encontró (véanse [16], [27] y [42] para los detalles) con series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{3.4}$$

donde p es un número natural dado, mayor que uno. Si $p = 2$, tenemos la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

que constituyó el llamado problema de Basilea (véase [23] para los detalles): ¿cuánto vale la suma anterior? Lo habían intentado sin éxito, entre otros, Mengoli, Leibniz y Jakob Bernoulli. En particular éste último escribió desde Basilea: *"Grande sea nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos"*. Euler resolvió brillantemente este problema, publicando su solución en 1734 e incluyendo en un libro de texto de 1748 una demostración detallada de la misma ([47]).

$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots=\frac{\pi^3}{32}$ $\quad 1-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{7^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96}$

Leonhard Euler(1707-1783)

André Weil dedicó estas palabras a Euler: *"Ningún matemático alcanzó tal posición de indiscutible liderazgo en todas las ramas de las matemáticas, puras y aplicadas, como la tuvo Euler durante la mayor parte del siglo XVIII"*. Sin duda alguna Euler se situó a la altura de Arquímedes, Newton y Gauss por sus descubrimientos en física teórica y sus aportaciones en matemática pura y aplicada.

Sobre la solución del problema de Basilea, Euler escribió:

"Sin embargo, he encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$, *que depende de la cuadratura del círculo... He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es* 1*"*.

Han escuchado ustedes bien: la suma de la serie anterior es $\frac{\pi^2}{6}$.

¿Cómo es posible que aparezca el número π aquí? Estamos intentando sumar los inversos de los cuadrados de los números naturales y ... aparece el número π. El ingenio de Euler no es infinito, pero casi. Las ideas principales de Euler se describen a continuación (véase [47]

para aquellos aspectos que hoy en día puedan parecer poco rigurosos).
Como hemos mencionado con anterioridad, era conocido (desarrollo de Taylor, ¿qué harían los matemáticos excepcionales sin los que les precedieron?) que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

de donde se obtiene, para cualquier x que no sea cero,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

La parte derecha de la expresión anterior era para Euler un "polinomio de grado infinito", cuyos ceros por la expresión anterior son los mismos que los de la función $\operatorname{sen} x$, salvo $x = 0$, es decir, el conjunto de números reales $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Por tanto, este polinomio infinito se puede factorizar de la forma siguiente
(3.5)

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \displaystyle\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-k\pi}\right) =$$

$$= \textstyle\prod_{k=1}^{\infty} \displaystyle\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Hay veces en las que merece la pena poner las fórmulas de manera desarrollada para apreciar su belleza, evitando sumas y productos infinitos. Por ejemplo, la fórmula anterior queda de la forma siguiente:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$

Igualando el coeficiente de la potencia x^2, Euler obtuvo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(tengo que reconocer que la primera vez que vi esta demostración en [23] me quedé maravillado de su sencillez y belleza).

Euler estudió además el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \tag{3.6}$$

para diferentes valores de k. Por ejemplo, probó que

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945},$$

$$\ldots, \ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{26}} = \frac{2^{24} 76977927 \pi^{26}}{27!}$$

Además encontró una relación clara (para $k \in \mathbb{N}$ arbitrario) entre la suma (3.6) y los llamados números de Bernoulli, que no son sino los coeficientes del desarrollo

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$$

De hecho, para cualquier natural k se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}((2\pi)^{2k}/2(2k)!)B_{2k}$$

donde B_{2k} denota el número de Bernoulli de orden $2k$. Como estos números son racionales, se deduce inmediatamente que la suma (3.6) es irracional para cualquier valor de $k \in \mathbb{N}$.

El caso de la suma de las series del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} \tag{3.7}$$

con k un número natural sigue siendo un misterio; uno más, de los muchos que rodean a la función zeta de Riemann (véase [5], discurso de ingreso de J.L. Bueso en esta academia en el año 2005). En 1979, Roger Apéry ([8]; véanse también [20] y [49]) demostró que cuando $k = 1$, la suma es un número irracional, pero aún no se tiene un resultado similar para valores mayores de k, aunque también se sabe que el conjunto de los valores de k para los que (3.7) es irracional, es un conjunto infinito ([25]).

Regresando a nuestra "excursión" por los razonamientos originales de Fourier, merece la pena que destaquemos el paso donde Fourier "deriva respecto de π." También han escuchado ustedes bien: Fourier derivó respecto de π. ¿Cómo es esto? Sabemos derivar unas variables respecto de otras variables, pero ¿derivar respecto de una constante? Evidentemente esto también puede calificarse de audaz, aunque en este caso opino que el adjetivo audaz es poco. Pongamos de manifiesto muy brevemente lo que hizo Fourier. Por claridad en el discurso nos concentramos sólo en el primer coeficiente. Usando las sumas de las series mencionadas con anterioridad, Fourier encontró que

$$f_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{2n)}(\pi). \tag{3.8}$$

En este punto consideró que f_1 era una función de π y si denotamos por $s(\pi)$ a la función

$$s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

entonces, derivando dos veces respecto de π se obtiene

$$s''(\pi) + s(\pi) = f(\pi) \tag{3.9}$$

una ecuación diferencial de segundo orden que se sabía resolver en aquella época. Resolviéndola Fourier encontró para el primer coeficiente

$$f_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen} x \, dx \tag{3.10}$$

y la fórmula general (3.3).

Alcanzada la fórmula (3.3) Fourier hace una (¿otra?) afirmación sorprendente. Dice más o menos lo siguiente: *"Hasta ahora hemos supuesto que la función f puede desarrollarse en serie de potencias de la variable x. No obstante, podemos hacer que el resultado previo sea válido para funciones cualesquiera enteramente arbitrarias, incluso discontinuas. Para establecer la veracidad de esta afirmación es preciso que examinemos con detalle la naturaleza de los coeficientes de sen x, sen $2x, \ldots$ en el desarrollo (2.4)".*

En realidad, lo que está diciendo Fourier con esta afirmación es que los coeficientes (2.4) son áreas definidas. Hace algunos dibujos en su libro a este respecto.

Como hemos expuesto con anterioridad, no es de extrañar la reacción de los miembros de la Academia Francesa ante el contenido del trabajo de Fourier. El tiempo ha dado la razón a Fourier, no a la Academia y casi un siglo después, en 1902, Lebesgue probó en su tesis doctoral "Intégrale, longueur, aire" que las conclusiones (no los razonamientos) de Fourier son correctos (al menos para funciones de cuadrado integrable). De hecho, en la actualidad, la teoría de series de Fourier puede presentarse usando los conceptos y métodos del análisis funcional, la disciplina matemática por excelencia del siglo XX (aunque nos parezca mentira a algunos, se puede decir también del siglo pasado). Más concretamente, la teoría de series de Fourier está íntimamente relacionada con la integral de Lebesgue, los espacios de Hilbert (extensión a dimensión infinita de la noción de espacio euclídeo finito dimensional $\mathbb{R}^n$) y los operadores compactos y autoadjuntos (extensión, a dimensión infinita, de los endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ definidos por matrices simétricas). Fue Hilbert quien identificó una función dada f, de cuadrado integrable, con sus coeficientes de Fourier $\{f_n, \ n \in \mathbb{N}\}$. Estos coeficientes satisfacen la condición $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 < +\infty$. Hilbert introdujo además el espacio l^2 de sucesiones de números reales $\{a_n\}$, tales que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ es convergente. Posteriormente, Riesz y Fischer demostraron la existencia de una aplicación biyectiva entre el conjunto de las funciones de cuadrado integrable $L^2(a,b)$ (para a y b finitos) y el conjunto l^2 (a cada función se le hace corresponder sus coeficientes de Fourier). De esta manera, una función de cuadrado integrable puede ser considerada como un elemento con infinitas coordenadas (sus coeficientes de Fourier) en un espacio de dimensión infinita (ver [42]). Pensemos esto un momento porque, en mi opinión, es uno de los descubrimientos fundamentales de la matemática de principios del siglo XX. Una función no viene dada necesariamente por las imágenes de los elementos originales; en realidad es un punto en un espacio de dimensión infinita. Esta abstracción permite, por una parte, comprender mejor los métodos de Fourier; por otra, se consigue, sin apenas esfuerzo, una gran generalidad.

4. **Algunos temas relacionados con series de Fourier**

Puede dar la impresión de que el tema de las series de Fourier "fue muy interesante". Nada más lejos de la realidad, pues este tema "es muy interesante". Las ideas expuestas por Fourier en su libro plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes y han originado, a lo largo de dos siglos, gran cantidad de investigación matemática. De hecho, las series de Fourier nos permiten llegar hasta las fronteras de la investigación actual. Ya saben ustedes que una vez que un matemático se interesa por un problema, le da exactamente igual su origen y sus posibles aplicaciones (por algo es matemático y no físico, faltaría más). De hecho parece mentira que nos interesen algunas cuestiones tan abstractas, pero ya ven, esto es lo normal en matemáticas, gracias a Dios. La siguiente reflexión viene como anillo al dedo:
"La creación matemática se ha descrito algunas veces así: las matemáticas dicen A, escriben B, quieren decir C, pero lo que significan es D. Y de hecho, D es una idea espléndida que emerge al poner orden en la confusión".

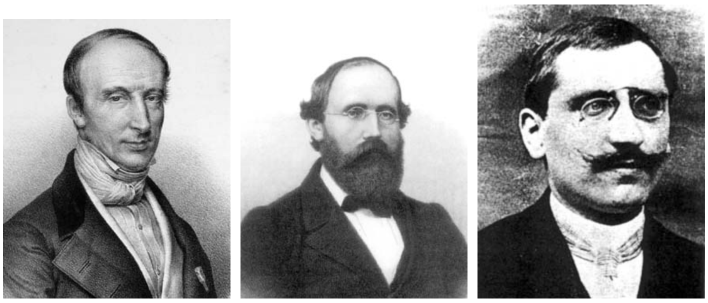
Teorías de integración de Cauchy, Riemann y Lebesgue.

El mismo Fourier dice en su libro que la fórmula (3.3) es un resultado destacable, puesto que la función considerada puede ser enteramente arbitraria, siempre que

(3.3) se pueda calcular. Precisamente el intentar dar sentido a los llamados coeficientes de Fourier ha motivado de manera significativa los diferentes conceptos de integral (véase [42] para fechas históricas concretas). En efecto, para el caso en que f es una función continua, Cauchy introdujo lo que hoy en día se conoce con el nombre de sumas de Riemann, es decir sumas de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{4.1}$$

donde $x_0 = 0 < x_1 < ... < x_n = \pi$ es cualquier partición del intervalo $[0, \pi]$ y $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $1 \leq i \leq n$. Aunque de manera no totalmente rigurosa (pues no expuso explícitamente el concepto de continuidad uniforme), Cauchy demostró que si f es continua en $[0, \pi]$ y el máximo de las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tiende a cero, entonces las anteriores sumas convergen a un límite llamado la integral de la función.



Cauchy (1789-1857) Riemann (1826-1866)
Lebesgue (1875-1941)

Riemann también se interesó por el tema afirmando que era importante, al menos para los matemáticos aunque no necesariamente para las aplicaciones físicas, establecer las condiciones más amplias posibles bajo las cuales tienen sentido las fórmulas de los coeficientes de Fourier. Introdujo así lo que llamamos hoy en día integral de Riemann, cuya idea básica es por una parte no asumir necesariamente que f es continua, y por otra establecer condiciones lo más generales posibles para que las sumas (4.1) tengan un único límite cuando el máximo de las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tiende a cero. Esto le permitió integrar funciones con un número infinito de discontinuidades. No obstante, hubo que esperar a los trabajos de Lebesgue sobre la medida de un conjunto, para tener una caracterización precisa de las funciones que pueden integrarse según Riemann.

De hecho, la que se considera actualmente como integral definitiva en muchos aspectos, es la introducida por Lebesgue en 1902 en su tesis doctoral mencionada con anterioridad: "Intégrale, longueur, aire". El punto de partida, respecto de la noción de integral de Cauchy o de Riemann es completamente diferente, pues lo que se intentaba era medir, de alguna forma, el conjunto de puntos de discontinuidad de una función dada (véase [7]). La noción de integral de Lebesgue permitió probar con gran generalidad muchas conclusiones sobre series de Fourier que, con anterioridad a Lebesgue eran conocidas para tipos particulares de funciones (lema de Riemann-Lebesgue, igualdad de Parseval, criterios de convergencia puntual, etc.). Además, muchos resultados de la teoría de integración de Lebesgue se expresan con una gran simplicidad y claridad respecto de las teorías de integración anteriores (teoremas de convergencia, teorema de Fubini, etc.), de tal forma que el conocimiento de la teoría de la integral de Lebesgue es, hoy en día, imprescindible, para poder entender y presentar adecuadamente la teoría de series de Fourier.

Funciones continuas no derivables.

Las nociones de continuidad y diferenciabilidad de una función real de variable real están hoy en día perfectamente establecidas. No obstante, el primitivo concepto de derivada debido a Newton y Leibniz era bastante más complicado de expresar del que conocemos en la actualidad. Fue Cauchy ([42]) quien, unificando las notaciones de Newton y Leibniz, y basado en una definición anterior de Bolzano de 1817, introdujo en 1823 la definición que hoy en día se da en todos los libros de texto

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4.2}$$

Durante bastante tiempo se estuvo convencido de que cualquier función continua debía ser derivable, excepto posiblemente en conjuntos "aislados" de puntos. Pero, insistamos, ¿en cuántos puntos puede una función continua no ser derivable? La respuesta a esta pregunta estuvo relacionada desde el principio con la siguiente cuestión sobre series de Fourier: ¿en cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua dada? De hecho, después de la publicación en 1822 del libro de Fourier, Dirichlet se ocupó durante varios años del problema de la convergencia de las series de Fourier, dando por primera vez de forma rigurosa en 1829 un conjunto de hipótesis para garantizar la convergencia de las mismas. Este conjunto de hipótesis incluía la continuidad. Durante aproximadamente los cincuenta años siguientes, se pensó que la continuidad de la función debería ser suficiente para la convergencia de su serie de Fourier. Sin embargo, algunos matemáticos sospechaban que ello no debía ser así y todo esto motivó el estudio de funciones "raras" en el sentido de que tales funciones fuesen continuas, pero no derivables "en

el máximo número de puntos posibles".
Riemann se encontró también con problemas parecidos en su trabajo de 1855, escrito para su habilitación y que trató sobre la representabilidad de una función en serie trigonométrica. Motivado por este problema, definió en 1868 una función f, integrable en cualquier intervalo real finito, pero que tiene un conjunto infinito de discontinuidades en cualquier intervalo real no trivial. Además, para esta función f definida por Riemann, una integral indefinida cualquiera es continua en cualquier punto de $\mathbb{R}$, y sin embargo no es derivable en ningún punto de discontinuidad de f. Con este procedimiento Riemann construyó un ejemplo de función continua en cualquier punto real, pero cumpliendo además la propiedad siguiente: en cualquier intervalo real no trivial, hay un conjunto infinito de puntos donde tal función no es derivable.
Posteriormente, Weierstrass, estudiando el tipo de funciones que podían representarse o desarrollarse en serie de Fourier, presentó en 1872 un ejemplo sorprendente a la Real Academia de Ciencias de Berlín: una función real, de variable real, continua en cualquier punto y no derivable en ninguno. Concretamente, el ejemplo de Weierstrass está dado por la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \tag{4.3}$$

donde $0 < b < 1$ y a es cualquier entero impar tal que $ab > 1 + (3\pi/2)$. El resultado de Weierstrass fue generalizado por diferentes matemáticos, destacando el resultado de Hardy ([34]) de 1916, quién demostró que se tiene la misma conclusión suponiendo hipótesis más generales: $0 < b < 1$ y $ab \geq 1$ (véase también [9]). Es un tema que sigue interesando en la actualidad, pues posteriormente se han dado numerosos ejemplos de funciones continuas no derivables. Algunas de las más sencillas pueden verse en [4], [44] y [48], éste último artículo del año 2005.

Puede pensarse que el tipo de funciones anteriores es excepcional. Nada más lejos de la realidad. El análisis funcional, la disciplina matemática por excelencia del siglo XX, permite probar que las anteriores situaciones son las que "usualmente cabe esperar". ¿Cómo es esto? La herramienta clave para entenderlo es lo que se conoce con el nombre de Teorema de la Categoría de Baire (Baire, 1899) que comentamos a continuación. Sea X un espacio de Banach real cualquiera. Si $M \subset X$, diremos que M es de primera categoría en X, si M es alguna unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $int\ \overline{M_n} = \emptyset$, donde $int\ \overline{M_n}$ denota el interior de la clausura de M_n y $\emptyset$ indica el conjunto vacío. Un subconjunto M de X se dice de segunda categoría en X, si M no es de primera categoría en X. El Teorema de la Categoría de Baire afirma que X es de segunda categoría en sí mismo.
Consideremos ahora $X = C([a,b], \mathbb{R})$, el espacio de las funciones reales y continuas, definidas en un intervalo dado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, con la norma uniforme. Sea

$$M = \{f \in X : \exists\ x \in [a,b) : \text{ existe } f'(x+)\}$$

Banach y Mazurkiewicz probaron en 1931 que el conjunto M es de primera categoría en X y por tanto $X \setminus M$ es de segunda categoría en X. Este resultado es de gran belleza. No obstante hemos de ser precavidos si hablamos de "conjuntos pequeños, conjuntos grandes, etc." De hecho no hay ninguna relación entre la noción topológica de categoría y la noción geométrica de medida de un conjunto. Usando los conjuntos ternarios de Cantor ([7]) no es difícil dar ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son de primera categoría en $\mathbb{R}$ y con medida (de Lebesgue) positiva. Asimismo existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ de segunda categoría en $\mathbb{R}$ y con medida cero.

En lo que respecta a las series de Fourier de funciones continuas, Du Bois-Reymond dió en 1873 un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier no convergía en un conjunto denso de puntos.

Llegados aquí, la pregunta puede ser: ¿en cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua? Hubo que esperar hasta 1966, año en que Carleson demostró que se da la convergencia salvo posiblemente en un conjunto de medida cero ([18]). Este resultado puede considerarse como uno de los más destacados de la matemática del siglo XX. La demostración de Carleson es realmente complicada y la referencia [1] puede ser de gran ayuda para aquellos que tengan interés en entenderla. Por cierto que el Premio Abel 2006 ha sido concedido a Carleson, entre otras cosas por sus importantes contribuciones al análisis armónico.

En 1966 también, Kahane y Katznelson probaron que dado cualquier conjunto A de medida nula existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en cada punto de A ([40]). Estas son las cosas bonitas de la matemática.

Unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica y teoría de conjuntos de Cantor.

La teoría de conjuntos de Cantor, base y fundamento de lo que se conoce con el nombre de matemática moderna, estuvo en buena parte motivada por el estudio de los puntos de convergencia o divergencia de las series trigonométricas. Fue este problema lo que llevó a Cantor a definir algunas de las primeras nociones de topología conjuntista, como las de conjunto cerrado y punto de acumulación y a introducir, entre otros conceptos, los ordinales transfinitos, creando lo que hoy en día se conoce como teoría de conjuntos. Esto no es raro en matemáticas: se comienza investigando un problema particular, que en principio interesa sólo a un número muy reducido de matemáticos, para terminar demostrando resultados de interés general que son útiles en muchas otras disciplinas, además de la matemática. Por eso soy un firme defensor de la matemática en toda su extensión, sin esa distinción artificial entre matemática pura y aplicada.

Volviendo al tema que nos ocupa, cuando Cantor comenzó a trabajar en la Universidad de Halle, Heine estaba interesado en la cuestión de la unicidad de la representación de una función dada en serie trigonométrica. Una serie trigonométrica es una serie de funciones de la forma

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)) \tag{4.4}$$

donde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que admite un desarrollo en serie trigonométrica si existe alguna serie trigonométrica como (4.4) tal que

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)), \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Por ejemplo, sabemos que esto es así si f es $2\pi-$periódica y de clase C^1 ([14], [44]). En este caso, los coeficientes

a_n y b_n son los coeficientes de Fourier definidos como

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{sen}(nt)\ dt$$

El problema que Heine planteó en 1869 a Cantor (cuando éste último tenía 24 años de edad) fue: ¿es el desarrollo en serie trigonométrica único? Es decir, si

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\mathrm{sen}(nx)) =$$
$$= a_0'/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos(nx) + b_n'\mathrm{sen}(nx)),\ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

¿es verdad que $a_0 = a_0'$, $a_n = a_n'$, $b_n = b_n'$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$? Este problema no era fácil y antes habían intentado resolverlo, sin éxito, el mismo Heine, Dirichlet, Lipschitz y Riemann, entre otros. Es claro que el problema es equivalente al siguiente: si

$$(4.6)\quad 0 = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\mathrm{sen}(nx)),\ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

¿es verdad que $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$?

Cantor probó en 1870 que ello era así y que incluso, se puede renunciar a la convergencia de la serie (4.6) en un conjunto finito de puntos. Como Cantor tenía madera de auténtico matemático, la pregunta que se hizo a continuación era obvia: ¿en cuántos puntos podemos renunciar a la convergencia de la serie (4.6) y sin embargo seguir teniendo el mismo resultado de unicidad? Según mis conocimientos, este problema sigue sin resolverse hoy en día en toda su generalidad, a pesar de que se han realizado numerosos progresos sobre ello. A continuación comentamos algunos.

En 1871 Cantor demostró que el conjunto de puntos excepcionales, es decir, aquellos donde no se tiene necesariamente convergencia de la serie trigonométrica (4.6), puede estar formado por infinitos elementos, siempre que tal conjunto sea "de orden finito". ¿Cómo definió Cantor el orden de un conjunto? De la siguiente manera: dado cualquier subconjunto E de números reales, Cantor introdujo el concepto de punto de acumulación de E, tal y como se entiende hoy en día. Al conjunto de todos los puntos de acumulación, conjunto derivado de E, lo notó por E'. Análogamente puede definirse el segundo conjunto derivado de E, E'', como el conjunto derivado de E', y así sucesivamente. Claramente se tienen las inclusiones $...E''' \subset E'' \subset E'$. Entonces, un conjunto es de orden finito si algún derivado suyo es finito. También Cantor definió los conjuntos cerrados como aquellos que contienen a su derivado. Es claro que la curiosidad de Cantor le iba a empujar a profundizar más en el tema y se preguntó: ¿qué subconjuntos de números reales son aquellos para los que algún derivado suyo es finito? En este sentido, Cantor demostró un resultado que merece destacarse por su belleza: un conjunto de orden finito es o finito o puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. A estos últimos conjuntos les dió el nombre de infinitos numerables. La primera vez que supe que la noción de numerabilidad de un conjunto se introdujo por problemas derivados de la teoría de series de Fourier, me llevé una gran sorpresa. Con anterioridad nada me hacía pensar que ambos temas pudieran estar tan íntimamente relacionados. Este es el motivo por el que soy un convencido defensor de introducir la historia de las ideas matemáticas en la enseñanza, al menos en la enseñanza universitaria. No creo que haya mejor motivación para los alumnos.

Cantor (1845-1918) Heine (1821-1881)

Cantor se interesó a continuación por la existencia de subconjuntos de números reales infinitos no numerables. También han escuchado ustedes bien, pues previamente a Cantor no se podían plantear esta cuestión. Cantor probó que el conjunto de los números reales es no numerable, continuando después con el estudio de subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^n$, probando en particular que "la recta real y el plano real tienen el mismo número de puntos". Sobre este último resultado el mismo Cantor comentó: *"si no lo hubiera demostrado, no me lo creería".*
Posteriormente se ha demostrado que cualquier conjunto numerable es válido también como conjunto de puntos excepcionales donde puede fallar la convergencia de la serie trigonométrica (4.6) y seguir teniendo la representación única (Bernstein, 1908 y Young, 1909). También se han dado ejemplos de conjuntos excepcionales no numerables. Finalmente, se ha demostrado que cualquier conjunto de puntos excepcional (en el sentido definido anteriormente) ha de ser de medida cero, pero existen conjuntos de medida cero que no son excepcionales. En fin, un verdadero galimatías. Realmente, este tema, que

ha interesado a los matemáticos desde hace más de 135 años, plantea numerosos problemas abiertos en la actualidad ([2], [19]) y está relacionado con muchas otras áreas del análisis clásico, teoría de la medida, análisis funcional, teoría de números, teoría de conjuntos, etc. Un estupendo y completo trabajo sobre el tema es [41].

Valores propios y dominios isoespectrales.
Comentemos a continuación algunos aspectos relacionados con las series de Fourier, valores propios, dominios isoespectrales, etc. Veremos cómo se entremezclan de manera armoniosa problemas de análisis y de geometría.

Como hemos mencionado con anterioridad, el interés de Fourier por desarrollos de la forma (2.4) estuvo motivado por la aplicación del método de separación de variables al problema (3.1). Más precisamente, si se buscan soluciones elementales de (3.1) de la forma $u(x,t) = X(x)P(t)$, ello origina el problema de valores propios (4.7)

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \; x \in (0,\pi), \; X(0) = X(\pi) = 0,$$

Es conocido que (4.7) tiene solución no trivial si y solamente si $\lambda \in \{n^2, \; n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\lambda = n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (4.7) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función $\operatorname{sen}(nx)$. Estos resultados son tan precisos porque (4.7) es una ecuación con coeficientes constantes, que se sabe resolver. Pero para el problema de la propagación del calor, las condiciones de contorno que se consideran pueden ser mucho más generales que las establecidas en (3.1). De hecho, desde el punto de vista de las aplicaciones, tienen gran interés condiciones de contorno tales como

$$\begin{array}{l} \alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = 0, \; t \geq 0, \\ \beta_1 u(\pi,t) + \beta_2 u_x(\pi,t) = 0, \; t \geq 0, \end{array}$$

donde u_x indica la derivada parcial respecto de la variable x y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son números reales dados. Incluso, las condiciones del cuerpo donde se propaga el calor no tienen que ser necesariamente uniformes. Si se aplica el método de separación de variables a este tipo de situaciones nos aparece la posibilidad de desarrollos en serie mucho más generales. La dificultad estriba en que las ecuaciones resultantes no tienen coeficientes constantes y por tanto los valores propios no se pueden calcular explícitamente. Pues para eso están los matemáticos, aunque quizás no se hubieran planteado estos problemas sin la ayuda de los físicos. A este respecto, la teoría de problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville proporciona, de manera bastante general, bases del espacio $L^2(a,b)$ (el espacio de funciones de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue) que pueden usarse en los problemas a estudiar. Estas ideas fueron desarrolladas, en el siglo XIX (concretamente entre 1829 y 1837) por Sturm, profesor de Mecánica en la Sorbona y por Liouville, profesor de matemáticas en el Collège de Francia. Con la ayuda del lenguaje de hoy en día, sus resultados pueden resumirse de la forma siguiente: consideremos un problema de contorno de la forma (λ es un parámetro real):

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{d}{dt}[\ p(t)\dfrac{dx(t)}{dt}\ ] + (\lambda - q(t))x(t) = 0,\ \ t \in [a,b] \\ (4.8) & \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0 \\ & \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0, \end{array}$$

donde suponemos las siguientes hipótesis:
1) $p \in C^1([a,b], \mathbb{R})$; además $p(t) > 0,\ \forall\ t \in [a,b]$; $q \in C([a,b], \mathbb{R})$.
3) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 son números reales dados tales que $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$.

Sturm y Liouville demostraron:
a) Cualquier valor propio de (4.8) es de multiplicidad 1.
b) Cualquier par de funciones propias x e y, asociadas respectivamente a valores propios distintos λ y μ, son ortogonales, es decir,

$$\int_a^b x(t)y(t)\ dt = 0$$

c) El conjunto de valores propios de (4.8) es infinito numerable. El sistema ortonormal de funciones propias asociado $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, es una base de $L^2(a,b)$.
d) Sea $g \in C^2[a,b]$ cualquier función satisfaciendo las condiciones de contorno dadas en (4.8). Entonces

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n(t),\ \forall\ t \in [a,b]$$

donde la serie converge de manera absoluta y uniforme en $[a,b]$ ($\langle , \rangle$ indica el producto escalar usual de funciones).

Una de las maneras más bonitas y sencillas de probar los resultados de Sturm y Liouville es usando el concepto de función de Green. Ello permite transformar (4.8) en una ecuación integral equivalente y trabajar, a partir de ahí, con operadores integrales. De esta forma van surgiendo de manera natural una serie de propiedades que, puestas de manera abstracta, dan lugar a los conceptos e ideas fundamentales de la teoría de operadores compactos y autoadjuntos. Esta teoría, debida en gran parte a Fredholm y Hilbert, tuvo su origen a finales del siglo XIX ([42]) y principios del XX y proporcionó muchas ideas claves para el nacimiento del análisis funcional. Permite generalizar de manera destacada la teoría de los desarrollos de Fourier, y legitima el uso de métodos análogos en problemas aparentemente muy diferentes de los aquí considerados. Por ejemplo, si estamos tratando el problema de la conducción del calor en un dominio (conjunto conexo y abierto) acotado) Ω de $\mathbb{R}^3$ en lugar de en una varilla unidimensional como en (3.1), tendríamos el problema

$$
\begin{aligned}
&\Delta_x u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\
&u(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \qquad (4.9) \\
&u(x,0) = f(x),\ \forall\ x \in \overline{\Omega},
\end{aligned}
$$

siendo Δ_x el operador laplaciano con respecto a $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Por su parte, $\partial\Omega$ indica la frontera del conjunto Ω.

Por su parte, si estamos tratando el problema de la vibración de una membrana $n-$dimensional que está fija en su borde, tendríamos el problema

$$
\begin{aligned}
&\Delta_x u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\ (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\
&u(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \qquad (4.10) \\
&u(x,0) = f(x),\ \forall\ x \in \overline{\Omega}, \\
&\tfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x),\ \forall\ x \in \overline{\Omega},
\end{aligned}
$$

donde f y g expresan, respectivamente, la posición inicial y velocidad inicial de la membrana. No cabe ninguna duda de que las ecuaciones (4.9), (4.10), junto con la llamada ecuación de Laplace

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega,$$

que aparece al estudiar soluciones estacionarias de los problemas anteriores, constituyen el corazón de la física matemática clásica.

La aplicación del método de separación de variables al problema (4.10), origina, en lugar de (4.7), que es un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el problema

$$\Delta X(x)+\lambda X(x) = 0,\ x \in \Omega;\ X(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{4.11}$$

Ahora puede aplicarse la teoría espectral de operadores compactos y autoadjuntos ([10]) para demostrar que el conjunto de valores propios de (4.11) es infinito numerable y que el conjunto de funciones propias asociadas, convenientemente ortonormalizadas, $\{X_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$, forma una base del espacio $L^2(\Omega)$. Esto justifica el hecho de que la condición inicial f se exprese como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \tag{4.12}$$

para coeficientes convenientes a_n. Así, la solución de (4.9) puede buscarse de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(t) X_n(x), \tag{4.13}$$

para funciones P_n convenientes. Ideas parecidas pueden aplicarse al estudio de otros problemas de naturaleza diferente.

Existen en la actualidad muchas cuestiones de interés en torno al problema de valores propios (4.11), que lo consideraremos en adelante para un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$. Una de ellas se relaciona con el conjunto de valores propios $\{\lambda_n(\Omega),\ n \in \mathbb{N}\}$ (al que denotaremos en adelante por espectro de Ω) y fue planteada por M. Kac en

1966 ([37]) en un famoso artículo titulado: Can one hear the shape of a drum?, es decir, ¿se puede oír la forma de un tambor? Previamente era conocido que otras propiedades de Ω, tales como el volumen y el área de la frontera, se pueden oír, es decir, se pueden obtener a partir del espectro ([37]).

El título de la conjetura anterior se relaciona claramente con el problema de la membrana vibrante (4.10). La cuestión que planteó Kac es la siguiente: dos dominios Ω_1 y Ω_2 se dicen isoespectrales si tienen el mismo espectro (la multiplicidad de los valores propios se tiene en cuenta para esto). Entonces, ¿es verdad que dos dominios isoespectrales son necesariamente isométricos? Esta misma cuestión puede plantearse para condiciones de contorno más generales y para otros tipos de operadores diferentes del laplaciano ([50], [45]).

En 1982, Urakawa ([52]) mostró un ejemplo de dominios isoespectrales en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, que no son isométricos. En 1992, Gordon, Webb y Wolpert ([29], [30]) expusieron un contraejemplo en $\mathbb{R}^2$. Otros ejemplos más generales pueden verse en [6] y [17]. Ahora bien, numerosas cuestiones en torno a esta conjetura quedan aún por resolver. Por ejemplo, en el contraejemplo mencionado los dominios no son convexos; entonces, ¿será verdad la conjetura de Kac para dominios convexos? Como se puede comprender, hay muchos problemas abiertos aún que relacionan íntimamente las series de Fourier con la geometría (véase [3], discurso de ingreso de M. Barros en esta Academia en el año 2000).

Grado topológico y coeficientes de Fourier.

Un último aspecto que vamos a comentar, relacionado con los coeficientes de Fourier, implica dos conceptos aparentemente alejados: el grado topológico de Brouwer de una aplicación continua y los coeficientes de Fourier de dicha aplicación. Si viviésemos lo suficiente, al final tendríamos oportunidad de comprobar que todo en matemáticas está relacionado. Pero ya ven, la reflexión de Luis Cernuda vuelve a surgir al final del discurso.

El grado topológico de Brouwer es la versión finito-dimensional de la teoría del grado topológico, una de las herramientas más útiles que se han creado en el siglo XX para estudiar problemas no lineales de naturaleza muy diferente. Por ejemplo, el famoso teorema del punto fijo de Brouwer (y su versión en dimensión infinita, el teorema del punto fijo de Schauder) es una consecuencia trivial de esta teoría, donde se entremezclan de manera magistral técnicas topológicas y analíticas. En [15] puede verse cómo el grado topológico de Brouwer permite obtener extensiones, en absoluto triviales, del conocido teorema de Bolzano para el caso de un intervalo real (o rectángulo $1-$dimensional) y del no tan conocido (yo diría que casi desconocido) teorema de Poincaré-Miranda, para sistemas de n ecuaciones con n incógnitas consideradas en un rectángulo $n-$dimensional. También, problemas planteados en física han desempeñado un papel muy importante (como con casi todo en matemáticas) para algunas extensiones muy recientes del grado topológico a aplicaciones que no son necesariamente continuas (véase [11]).

Volviendo al tema que nos ocupa, la relación entre el grado topológico y los coeficientes de Fourier, recordemos que si B_1 es la bola cerrada unidad de $\mathbb{R}^2$ y $g : B_1 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación continua que no se anula en la frontera de B_1, entonces su grado topológico está bien definido (véase, por ejemplo [21]). Denotémoslo por $deg(g)$. Si definimos la función $2\pi-$ periódica $h(x) = g(\exp(ix))$, puede demostrarse que, si g es una función de clase C^1, entonces

$$(4.14) \qquad deg(g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|h_n|^2,$$

donde h_n son los coeficientes de Fourier de la función h respecto de la base $\{\exp(inx),\ n \in \mathbb{N}\}$. De hecho, (4.14) fue probado por Brezis y Nirenberg bajo condiciones más generales (véase el trabajo [11]). También conjeturaron que (4.14) debería ser verdad para funciones continuas g. La respuesta negativa a esta conjetura ha sido dada por Korevaar en 1999 ([43]). No obstante, esto ha planteado nuevos interrogantes como el propuesto por Brezis con el título siguiente: can one hear the degree of continuous maps?, es decir, ¿se puede oír el grado de una aplicación continua? De manera más precisa: si h y k son dos aplicaciones continuas de la frontera de B_1 en sí misma, con coeficientes de Fourier respectivos h_n y k_n verificando $|h_n| = |k_n|,\ \forall n \in \mathbb{N}$, ¿es verdad que $deg(h) = deg(k)$? Se ha dado una respuesta positiva a esta cuestión para funciones "algo mejores que las continuas", incluyendo funciones "suficientemente Hölder-continuas". Puede consultarse el reciente trabajo de Brezis del año 2006 ([11]) sobre este tema. Es claro que cuestiones relacionadas con los coeficientes de Fourier continúan desempeñando un papel importante en la historia de la Matemática.

5. **Epílogo**

No cabe duda de que la teoría de series de Fourier es una de las creaciones más grandes de la Historia de la Ciencia. Ha tenido, además, una gran influencia en el nacimiento y desarrollo de numerosas técnicas y conceptos matemáticos. En la actualidad, la teoría de series de Fourier sigue teniendo una gran importancia y su conocimiento es de gran utilidad en disciplinas muy diversas como matemáticas, física, biología, ingeniería, economía, etc. Tales series están siempre presentes en todos aquellos procesos naturales de tipo oscilatorio, de difusión o de naturaleza periódica. Por mencionar algunos, los métodos de Fourier se emplean en problemas tan diversos como los relacionados con: el ciclo de las manchas solares, predicción de mareas, mejora de la calidad de las imágenes de los objetos celestes tomadas desde el espacio, teoría de la señal, transmisión de sonidos e imágenes, física de plasmas, física de semiconductores, acústica, sismografía, oceanografía, confección de imágenes en medicina (escáner TAC), estudio del ritmo cardíaco, análisis químicos, estudios de rayos X (usando el análisis de Fourier, los astrónomos pueden estudiar las variaciones en intensidad de las señales de rayos X de un objeto celeste), etc.

Después de preparar este discurso, no me cabe ninguna duda de lo que dije al comenzar: si te gustan las matemáticas y la física, en las series de Fourier encontrarás ambas cosas de manera plena. Si te gusta la enseñanza, aquí tendrás una oportunidad única de ponerla en práctica: las series de Fourier aúnan a la perfección la historia, el desarrollo de las ideas, las aplicaciones, etc., lo que hoy en día se llamaría, de manera tan desafortunada, "enseñanza integral." Si te gusta la investigación, aquí encontraras numerosos problemas abiertos para entretenerte con ellos (¡ojo, no son fáciles!). Las siguientes afirmaciones de nuestro maestro Miguel de Guzmán, sacadas del prólogo de mi libro sobre series de Fourier ([14]) son muy indicativas:

"La motivación para el estudio de las series de Fourier puede provenir de fuentes diferentes, pero su historia aúna muchas de ellas. En ella se percibe cómo se entrelazan los esfuerzos e intentos diversos de la matemática tanto para entender mejor el universo físico en que estamos inmersos como para escudriñar los problemas apasionantes que se derivan del examen profundo de los instrumentos mismos que se van creando para ello y que viene a dar lugar al desarrollo esplendoroso del análisis matemático en la actualidad. Desde el poema matemático en torno a la comprensión del calor (como definió Maxwell el tratado inicial de Fourier) hasta el desarrollo actual de la teoría de ondículas que se manifiesta tan fecundo en el mundo de las aplicaciones más diversas, se puede experimentar la continuidad del esfuerzo de los matemáticos de varios siglos".

Me gustaría acabar con las palabras de Lord Kelvin, que siguen teniendo plena actualidad: *"Los métodos de Fourier no son solamente uno de los resultados más hermosos del análisis moderno, sino que puede decirse además que proporcionan un instrumento indispensable en el tratamiento de casi todas las cuestiones de la física actual, por recónditas que sean".*

Bibliografía

[1] J. Arias de Reyna. *Pointwise convergence of Fourier series.* Lecture Notes in Mathematics, 1785, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[2] J. M. Ash y S.T. Tetunashvili. *New uniqueness theorems for trigonometric series.* Proc. Amer. Math. Soc., 128, 2000, 2627-2636.

[3] M. Barros. *Postulados, coordenadas, cálculo, grupos, variedades, fibrados y física.* Discurso de ingreso en la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, 2000.

[4] R. Beals. *Analysis. An Introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] J.L. Bueso. *Números perfectos y matemáticos imperfectos.* Discurso de ingreso en la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, 2005.

[6] P. Buser, J. Conway, P. Doyle y K. Semmler. *Some planar isospectral domains.* Internat. Math. Res. Notices, , 1994, no. 9 (electronic).

[7] J. Alaminos, C. Aparicio, P. Muñoz y A.R. Villena. *Un recorrido histórico del teorema fundamental del cálculo.* Sometido a publicación

[8] R. Apery. *Irrationalite de $\zeta 2$ et $\zeta 3$.* Astérisque 61, 11-13 (1979).

[9] A. Baouche y S. Dubuc. *La non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass.* Enseign. Math., 38, 1992, 89-94.

[10] H. Brezis. *Análisis Funcional.* Madrid, Alianza Universidad Textos, 1984.

[11] H. Brezis. *New questions related to the topological degree.* The unity of mathematics, Progr. math. 244, Birkhäuser Boston, 2006, 137-154.

[12] A. Cañada. *Brook Taylor, tercer centenerario de su nacimiento.* Epsilon, 4, 1985, 104-111.

[13] A. Cañada. *Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos.* Relime,

Revista Latinoamericana de investigación en Matemática educativa, 3, 2000, 293-320.
[14] A. Cañada *Series de Fourier y aplicaciones, un tratado elemental con notas históricas y ejercicios resueltos.* Pirámide, 2002.
[15] A. Cañada y S. Villegas. *¿El Teorema de Bolzano en varias variables?* La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 7, 2004, 101-121.
[16] A. Cañada. *Fourier y sus coeficientes.* Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, 36, 2006, 125-148.
[17] S. J. Chapman. *Drums that sound the same.* Amer. Math. Moth., 102, 1995, 124-138.
[18] L. Carleson. *On convergence and growth of partial sums of Fourier series.* Acta Math., 116, 1966, 135-157.
[19] R. Cooke. *Uniqueness of trigonometric series and descriptive set theory, 1870-1985.* Arch. Hist. Exact Sci. 45, 1993, 281–334.
[20] A. Córdoba. *Disquisitio numerorum.* Gac. R. Soc. Mat. Esp. 4, 2001, 249-260.
[21] K. Deimling *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.
[22] J. Dhombres y J.B. Robert. *Fourier. Créateur de la physique-mathématique.* Belin, 1998.
[23] W. Dunham. *Euler. The master of us all.* The Mat. Ass. Am. Dolciani Mat. Expositions, 22, 1999. Traducido al español por Jesús Fernández, con comentarios de Antonio Pérez Sanz. (Euler. El maestro de todos los matemáticos). (Spanish) La Matemática en sus Personajes. 6. Madrid: Nivola Libros Ediciones, 2000.
[24] J. Duoandikoetxea. *200 años de convergencia de las series de Fourier.* Gac. R. Soc. Mat. Esp., 10,

2007, 651-688.

[25] S. Fischler. *Irrationalité de valeurs de zeta (d'après Apéry, Rivoal,...)* Astérisque, 294, 2004, 27-62.

[26] J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur.* Didot, 1822.

[27] J.B. Fourier. *The analytical theory of heat.* Dover Publ., New York, 1955.

[28] E.A. González-Velasco. *Connections in mathematical analysis: the case of Fourier series.* Am. Math. Monthly, 99, 427-441, 1992.

[29] C. Gordon, D. Web y S. Wolpert. *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds.* Invent. Math., 110, 1992m 1-22.

[30] C. Gordon, D. Web y S. Wolpert. *You cannot hear the shape of a drum.* B. Am. Math. S., 27, 1992, 134-138.

[31] I. Grattan-Guinness. *Joseph Fourier 1768-1830.* The MIT Press, 1972.

[32] M. de Guzmán. *Impactos del análisis armónico.* Discurso de ingreso en la Real Academica de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman /impactoanalisisarmonico.ht, 1983.

[33] M. de Guzmán. *El rincón de la pizarra.* Pirámide, Madrid, 1996.

[34] G. H. Hardy. *Weierstrass's Non-Differentiable Function.* Trans. Amer. Math. Soc. 17, 1916, 301-325.

[35] J. Herivel. *Joseph Fourier: The Man and the Physicist.* Oxford: Clarendon Press, 1975.

[36] E.W. Hobson. *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series.* Cambridge University Press, 1927.

[37] M. Kac. *Can one hear the shape of a drum?* Amer. Math. Monthly, 73, 1966, 1-23.

[38] J.P. Kahane. *A century of interplay between Taylor series, Fourier series and Brownian motion.* Bull. Lond. Math. Soc., 29, 1997, 257-279.

[39] J. P. Kahane. *Le retour de Fourier.* Académie des Sciences, Paris, 2005. Traducción al castellano por J. Duoandikoetxea en la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 10, 2007, 678-688.

[40] J.P. Kahane y Y. Katznelson. *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques.* Studia Math. 26, 1966, 305-306.

[41] A. S. Kechris *Set theory and uniqueness for trigonometric series.* Preprint, 1997. http://www.math.caltech.edu/people/kechris.html

[42] M. Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, 1972. Versión española en Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[43] J. Korevaar. *On a question of Brezis and Nirenberg concerning the degree of circle maps.* Sel. Math., New Ser. 5, 1999, 107-122.

[44] T. W. Körner. *Fourier analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[45] M. Levitin, L. Parnovski y I. Polterovich. *Isospectral domains with mixed boundary conditions.* J. Phy., A: Math. Gen. 39, 2006, 2073-2082.

[46] N.N. Luzin. *Función.* Gac. R. Soc. Mat. Esp., 6, 2003, 201-225.

[47] M. Mckinzie y C. Tuckey. *Hidden lemmas in Euler's summation of the reciprocal of the squares.* Arch. Hist. Exact Sci., 51, 1997, 29-57.

[48] H. Okamoto. *A remark on continuous, nowhere differentiable functions.* Proc. Japan Acad. 81, Ser. A, 2005, 47-50.

[49] A. van der Poorten *A proof that Euler missed...Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$. Math. Intelligencer, 1, 1978/79, 195-203.

[50] M.H. Protter. *Can one hear the shape of a drum? Revisited.* SIAM Rev. 29, 1987, 185-197.

[51] D.J. Struik (editor). *A sourcebook in Mathematics, 1200-1800.* Hardvard University Press, XIV, Cambridge, Massachusetts, 1969.

[52] H. Urakawa. *Bounded domains which are isospectral but not congruente.* Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. 15, 1982, 441-456.

DISCURSO DE CONTESTACIÓN

Manuel Barros Díaz

Académico Numerario de la Sección de Matemáticas

Excmo. Sr. Presidente
Excmos. e Ilmos. Sres. Académicos
Señoras y Señores

Deseo, en primer lugar, expresar públicamente mi agradecimiento a esta Academia por el honor que me hizo cuando me designó para presentar al Prof. Antonio Cañada Villar en el solemne acto de su ingreso en ella.

Quiero decir, a continuación, que este privilegio es, por un lado, muy grato por diversas razones que trataré de exponer y, por otro lado, fácil por los excepcionales méritos académicos y científicos que concurren en la persona del Prof. Cañada.

El Prof. Cañada estudió la licenciatura en Ciencias Matemáticas en esta Universidad, creo que pertenece a la 12 promoción (entre los cursos 1974-75 y 1978-79). En aquellos tiempos los estudios de Matemáticas en la Universidad de Granada empezaron a ser distintos de como eran en sus inicios. Estaba naciendo un nuevo concepto de Profesionalidad en la Universidad. Los Profesores, con dedicación exclusiva, además de realizar su actividad docente, empezaron a tener inquietudes investigadoras. Se empezaron a defender las primeras tesis doctorales en Matemáticas. En este sentido podríamos decir que el Prof. Cañada pertenece, en cuanto a sus estudios de licenciatura, a la segunda etapa de la de Matemáticas.

A finales de 1976, yo me doctoré en esta Universidad y después de realizar una estancia pos-doctoral, en Paris VI, volví a Granada para ocupar, de manera interina, una Agregaduría de Geometría V (Diferencial). Tuve la suerte de tener entre mis estudiantes a aquel adolescente de Torredonjimeno (por entonces era ya un joven) que soñaba con la enseñanza y en particular con la de la Matemática. Creo que le tuve, como estudiante, en un curso sobre Geometría Diferencial de variedades y permítanme que les confiese que con estudiantes como Antonio, la docencia universitaria es maravillosa. Esta idea era compartida por todos los profesores de Antonio (entonces, y a pesar de que existían los mismos Departamentos que ahora, la convivencia, entre los profesores que formábamos el Claustro de Matemáticas, era más estrecha por razones obvias).

Antonio Cañada era un estudiante brillante y profundo. Era riguroso e intuitivo y, lo más importante, su mente poseía un extraordinario equilibrio entre el rigor y la intuición. Permitidme una licencia a modo de segunda confesión, ésta creo que no la conoce ni el propio Antonio: recuerdo que sufrí una pequeña frustración cuando supe que no iba a estudiar Geometría. Antonio hubiera sido un excelente geómetra. Realmente, y puesto que yo creo que nació para ser matemático, hubiera destacado en cualquier rama de la Matemática. Sin embargo, como nos ha confesado en su discurso, al ingresar en la Universidad estaba dudando entre estudiar matemática o física. La conclusión silogística es clara: debería dedicarse a la geometría diferencial (de ahí mi esperanza) o bien hacerlo al análisis matemático pero no a cualquier tipo de análisis matemático sino a las ecuaciones diferenciales. No obstante, las ecuaciones diferenciales son esenciales tanto en geometría diferencial como en física. Además, éstas ofrecen motivaciones excelentes para aquellas de tal modo que sería francamente aburrido hacer ecuaciones sin contar con la geometría y la física. Deseo, a estas alturas, ilustrar y enfatizar este flujo a tres con un par de ejemplos.

- A finales del siglo XIX y en el contexto de lo que hoy podemos mencionar como geometría diferencial clásica, se puso de moda el estudio de las superficies del espacio, con curvatura constante negativa. En este contexto y en 1880, un matemático griego, J.N. Hazzidakis, publicó un artículo en el Journal de Crelles. En él, prueba que las superficies de curvatura constante negativa se corresponden (de manera uno-uno) con las soluciones de una equación diferencial no lineal e hiperbólica. Esta ecuación es actualmente conocida como ecuación de sine-Gordon y posee una gran importancia en diversos contextos de la física: teoría de campos relativista, física del estado sólido, óptica no lineal etc. En particular, es una ecuación con soluciones que representan solitones lo que la hace muy atractiva.
- Muchas veces, tanto en matemática como en física, es importante explotar las simetrías de un problema, cuando las tiene, para encontrar su solución. Esta idea se enmarca dentro de lo que se conoce como **principio de criticalidad simétrica**. En el contexto de las ecuaciones diferenciales, sobre todo cuando se corresponden con las de campo asociadas a un determinado Lagrangiano, no es más que una manera de usar la geometría para encontrar soluciones de aquellas. Este principio ha sido usado en infinidad de ocasiones y en

muchas de ellas de manera implícita y sin ser notado. Incluso el propio H. Weyl lo usó sin darse cuenta cuando obtuvo la solución de Schwarzschild para las ecuaciones de campo de Einstein.

Después de esta licencia, volvamos a la trayectoria académica de Antonio Cañada. Se licenció en junio de 1979, con premio extraordinario, y decidió, con gran acierto, dedicarse a las ecuaciones diferenciales. Bajo la dirección del Prof. Pedro Martínez Amores y en esta Universidad, realiza su tesis doctoral y la defiende en abril de 1982, también obtuvo premio extraordinario en su doctorado. Desde entonces, el Prof. Cañada ha realizado aportaciones en investigación y docencia (también en gestión) que demuestran la excelencia de su historial científico y académico. Deseo, a continuación, resaltar algunas de las características más notables del Antonio Cañada senior.

- En estos momentos, en los que todo se evalúa, existen unos parámetros bien claros y perfectamente definidos para valorar los historiales científicos y académicos. En particular, y al menos en las áreas de ciencias experimentales, en la valoración de la actividad investigadora es determinante la presencia de una serie amplia y continuada de publicaciones científicas en revistas indexadas e importante factor de impacto de acuerdo con el "Journal Citation Reports". En el historial científico del Prof. Cañada se aprecia una serie de casi cuarenta publicaciones científicas en revistas excelentes y con un alto factor de impacto: "Journal of Differential Equations", "Transactions of the American Mathematical Society", "Journal of Functional Analysis", "Journal of the European Mathematical Society", por poner algunos ejemplos. Paralelamente, el Prof. Cañada ha liderado grupos y equipos de investigación a través de siete proyectos de investigación de los planes nacionales y europeos. También ha dirigido ocho tesis doctorales y entre sus discípulos se encuentran importantes investigadores de esta Universidad: Rafael Ortega, David Arcoya, José Luis Gámez, por citar a algunos. Además, el programa de movilidad del Prof. Cañada es amplio, habiendo realizado diversas estancias de investigación en centros de prestigio y calidad reconocidos: University of Texas (en Arlington), Universita di Venecia, Scuola Normale Superiore di Pisa, por citar algunos. Ha pronunciado diversas conferencias en seminarios y congresos (Lovaina, Politécnico de Torino, La Sapienza etc.). Posee todos los tramos posibles de investigación, docencia y autonómicos y recibió en 1981 el premio de investigación de esta Academia.

- Además de un excelente científico, el Prof. Cañada es un profesor, mejor, un maestro extraordinario, se puede decir que es un enamorado de la matemática. Su actividad docente universitaria, además de amplia, está excepcionalmente complementada y cualificada. Ha realizado una encomiable labor divulgativa a través de artículos que, por ahora, ha culminado en un maravilloso libro de texto sobre las series de Fourier. Un dato objetivo y actual para calificar de excelente su manera de transmitir la matemática es su delicioso discurso de ingreso en esta Academia con el que hoy nos ha agasajado.

- Antonio Cañada es, además de un excelente científico y un maestro excepcional, un universitario integral. En su historial académico se aprecia una notable labor relacionada con la gestión universitaria. En efecto, como ya se ha mencionado, ha gestionado, como investigador principal, el desarrollo de siete proyectos de investigación obtenidos en los planes nacionales y europeos. Posee experiencia en organización de actividades de I+D. Ha sido director del Departamento de Análisis Matemático de esta Universidad. Ha realizado una encomiable labor editorial. Es asesor científico y experto en activo de la ANEP, etc.
- Excelente científico, maestro excepcional, universitario integral. El Prof. Cañada ha realizado, y lo está haciendo, una obra a la que hay que calificar de creadora y solidaria. Creadora en todo el significado de la palabra y solidaria, por toda la gente con la que se ha comprometido y no ha defraudado. Posee un extraordinario espíritu universitario, ha trabajado por y para la Universidad y siempre colaborando con colegas y dirigiendo a estudiantes.

Ilmos. Sres. Académicos, Señoras y Señores, quiero poner de manifiesto la satisfacción que me produce el ingreso del Prof. Cañada en esta insigne Academia. Además de por sus cualidades, científicas y humanas, excepcionales ya reseñadas, su ingreso en la Academia viene a cubrir una de las carestías más sangrantes que históricamente ha tenido. El nuevo académico es un grandísimo experto en el campo de las ecuaciones diferenciales. Seguramente, todos estaremos de acuerdo en admitir que esta disciplina define un (por no decir el) camino más corto entre la matemática pura y las otras ciencias experimentales que tan ilustremente están representadas en esta Academia. Las soluciones y los tratamientos de muchos problemas de las distintas ciencias experimentales se encuentran codificados en ecuaciones diferenciales. A partir del momento en el que se propuso al Prof. Cañada para ocupar una plaza de Académico Numerario, la Academia hizo justicia con las ecuaciones diferenciales. Hoy, se materializa este hecho. Cuidemos a la disciplina y también al nuevo académico que aquí la representa.

Prof. Cañada, Antonio, en nombre de la Academia, de sus miembros y en el mío propio, te doy la bienvenida con las más cordiales felicitaciones.